Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2009
Wykład 4. Liczby kardynalne, indukcja pozaskończona

14/10/09

DOBRY PORZĄDEK

Niech X będzie dowolnym zbiorem. *Dobry porządek* to relacja $P \subset X \times X$ (będziemy pisać $x \leq y$ zamiast $\langle x, y\rangle \in P$) o własnościach:
1. $\forall x \in X \;\; x \leq x$, (zwrotność)
2. $\forall x, y, z \in X \;\; (x \leq y \;\wedge\; y \leq z) \implies x \leq z$ (przechodniość)
3. $\forall x, y \in X \;\; (x \leq y \;\wedge\; y \leq x) \implies x = y$ (antysymetryczność)
4. $\forall x, y \in X \;\; x \leq y \;\vee\; y \leq x$ (liniowość)
5. $\forall A \subset X, A \neq \emptyset \; \exists a \in A \; \forall x \in A \; a \leq x$ (każdy niepusty podzbiór X ma element najmniejszy). Element ten będziemy oznaczać przez $\min(A)$.

UWAGA: Będziemy pisać $x < y$ gdy $x \leq y \wedge x \neq y$.

Parę $(X, \leq)$ nazywamy *zbiorem dobrze uporządkowanym.* Jeśli X jest zbiorem pustym, to nie można w nim zdefiniować porządku, mimo to $\emptyset$ też nazwiemy zbiorem dobrze uporządkowanym.

Definicja: *Odcinkiem początkowym* w porządku $(X, \leq)$ nazywamy dowolny podzbiór $A \subset X$ spełniający warunek $(a \in A \;\wedge\; x \leq a) \implies x \in A$. (Zbiór pusty jest odcinkiem początkowym, bo poprzednik tej implikacji jest zawsze fałszywy).

Ćwiczenie: Jeśli A jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$, to albo $A = X$ albo $A = \{x \in X : x < a\}$ dla pewnego $a \in X$.

Ćwiczenie: Jeśli A jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$, to A jest dobrze uporządkowany (porządkiem $\leq$ obciętym do $A \times A$).

Ćwiczenie: Jeśli A jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$ i B jest odcinkiem początkowym w $(A, \leq)$, to B jest odcinkiem początkowym w $(X, \leq)$.

Definicja: Dwa dobrze uporządkowane zbiory $(X, \leq)$ i $(Y, \preccurlyeq)$ nazywamy *izomorficznymi* jeśli albo oba są puste, albo oba są niepuste i istnieje bijekcja (funkcja różnowartościowa i "na") $f : X \to Y$ zachowująca porządek, tzn. spełniająca dla dowolnych $x, y \in X$ warunek
$x \leq y \implies f(x) \preccurlyeq f(y)$.
(Ćwiczenie: wtedy $x \leq y \iff f(x) \preccurlyeq f(y)$.)

Wiadomo, że (przy założeniu aksjomatu wyboru (AC)) *każdy zbiór można dobrze uporządkować.*

LICZBY PORZĄDKOWE

Liczby porządkowe to pewne ustalone zbiory dobrze uporządkowane (między innymi $\emptyset$ jest też liczbą porządkową). Każdy zbiór dobrze uporządkowany jest izomorficzny z jedyną liczbą porządkową. Liczby porządkowe oznaczać będziemy przez $\emptyset$, $(\alpha, \leq)$, $(\beta, \leq)$, itp. Zazwyczaj jednak będziemy pomijać znak porządku i pisać tylko α, β, itp., a zamiast $\emptyset$ będziemy pisać 0.

Własności liczb porządkowych:

1. Dla dowolnych liczb porządkowych α i β albo α jest izomorficzna z pewnym odcinkiem początkowym w β albo odwrotnie. Jeśli zachodzą oba warunki, to $\alpha = \beta$. Oznacza to, że w klasie liczb porządkowych można wprowadzić porządek liniowy

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \text{ jest izomorficzna z pewnym odcinkiem początkowym w } \beta$$

2. Każda liczba porządkowa α jest izomorficzna ze zbiorem wszystkich liczb porządkowych ostro mniejszych od niej. De facto, każda liczba porządkowa JEST zbiorem wszystkich liczb porządkowych ostro mniejszych od niej. To zdanie definiuje liczby porządkowe. Liczbami porządkowymi są:
$\emptyset$ oznaczany przez 0
$\{0\}$ oznaczany przez 1
$\{0, 1\}$ oznaczany przez 2
$\vdots$
$\{0, 1, 2, \dots\}$ oznaczany przez ω (lub ω_0) (tożsamy ze zbiorem $\mathbb{N}_0$)
$\{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ oznaczany przez $\omega + 1$
$\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\}$ oznaczany przez $\omega + 2$
$\vdots$
$\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$ oznaczany przez 2ω
$\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega\}$ oznaczany przez $2\omega + 1$
$\vdots$
$\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 2 \dots, \}$ oznaczany przez 3ω
$3\omega + 1$
$\vdots$
4ω
$\vdots$
5ω
$\vdots$
$\omega\omega$ (oznaczany ω^2)
$\vdots$
ω^3
$\vdots$
ω^ω
itd.

Widać, że porządek $\leq$ w klasie wszystkich liczb porządkowych jest dobry: dowolny niepusty zbiór liczb porządkowych ma element najmniejszy – ich przekrój. Każda liczba porządkowa α ma swój *następnik* $\alpha + 1$ zdefiniowany jako zbiór wszystkich liczb porządkowych miejszych równych od α. Jest to zarazem najmniejsza liczba porządkowa ostro większa od α. Niektóre liczby porządkowe α mają swój *poprzednik* (największą liczbę porządkową ostro mniejszą od α). Jest tak jeśli $\alpha = \beta + 1$ dla pewnego β. Wtedy poprzednikiem α jest β. Jednak nie wszystkie liczby porządkowe mają poprzednik. Na przykład ω nie jest postaci $\beta + 1$. Liczby takie nazywamy *liczbami porządkowymi granicznymi*.

Jeśli A jest zbiorem liczb porządkowych, to $\beta = \bigcup A$ jest też liczbą porządkową i spełnia $\alpha \leq \beta$ dla wszystkich $\alpha \in A$. Jest to najmniejsza liczba spełniająca taki warunek i dlatego będziemy zamiast $\bigcup A$ pisać $\sup A$.

Mocą liczby porządkowej α nazywamy po prostu jej moc (liczbę kardynalną). Dla nas istotny będzie podział na liczby porządkowe *przeliczalne* i *nieprzeliczlne*. Wszystkie liczby wypisane na poprzedniej stronie są przeliczalne.[1]
Najmniejszą liczbą porządkową nieprzeliczalną jest ω_1 zdefiniowana jako zbiór wszystkich liczb porządkowych przeliczalnych. Suma dowolnego ciągu (zbioru przeliczalnego) liczb przeliczalnych jest liczbą przeliczalną (bo suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna). Liczby ω_1 nie można zatem "osiągnąć" (jako suremum) żadnym ciągiem liczb przeliczalnych. Dlatego liczba ω_1 nie pojawi się w "diagramie z kropkami" jak poprzedniej stronie, gdzie "wiadomo co znaczą wszystkie kropki".

INDUKCJA POZASKOŃCZONA

Indukcja pozaskończona pozwala na dwie rzeczy:

1. Definiowanie rodzin zbiorów indeksowanych liczbami porządkowymi
(jest to analogia definiowania ciągów wzorem rekurencyjnym),

2. Dowodzenie własności dla elementów zbioru dobrze uporządkowanego
(jest to analogia dowodu przez indukcję).

Definiowanie poprzez indukcję pozaskończoną
Chcemy zdefiniować rodzinę zbiorów A_α gdzie α przebiega pewną liczbę porządkową α_0. (Przypomnijmy, że elementami liczby porządkowej są liczby porządkowe mniejsze od niej. Inaczej można więc powiedzieć „gdzie $\alpha < \alpha_0$".) Postępujemy następująco:
1. Najpierw definiujemy A_0 (czasem A_1).
2. Bierzemy $\alpha < \alpha_0$ i zakładamy, że zdefiniowane zostały zbiory A_β dla wszystkich $\beta < \alpha$. Teraz definiujemy A_α posługując się zbiorami A_β gdzie $\beta < \alpha$.

Po tych krokach A_α jest zdefiniowane dla wszystkich $\alpha < \alpha_0$.

W praktyce często w kroku 2. rozróżnia się na dwa przypadki: jeśli α ma poprzednik (czyli jest postaci $\beta + 1$), to $A_\alpha = A_{\beta+1}$ definiuje się tylko przy użyciu jednego zbioru A_β. Jeśli α jest liczbą graniczną to postępuje się jak w pierwotnym opisie w punkcie 2.

[1] Uwaga: Mocą liczby porządkowej ω jest $\aleph_0$, jednak mocą liczby ω^ω nie jest $\aleph_0^{\aleph_0}$ (czyli continuum). Liczba kardynalna $\aleph_0^{\aleph_0}$ to moc zbioru wszytskich nieskończonych ciągów o wartościach naturalnych, natomiast ω^ω to typ porządkowy zbioru wszystkich **skończonych** ciągów o wartościach naturalnych (ale bez ograniczenia na ich długość).

Przykład: Niech $\mathcal{A}$ będzie niepustą rodziną zbiorów zawartych w pewnej przestrzeni X. Dla liczb porządkowych $\alpha < \omega_1$ zdefiniujemy rodziny $\mathcal{A}_\alpha$ podzbiorów X.
1. Dla $\alpha = 0$ kładziemy $\mathcal{A}_0 = \{A, A^c : A \in \mathcal{A}\}$.
2. Weźmy $\alpha < \omega_1$ i załóżmy, że zdefiniowaliśmy $\mathcal{A}_\beta$ dla wszystkich $\beta < \alpha$. Teraz definiujemy $\mathcal{A}_\alpha$ następująco: najpierw bierzemy $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$, a następnie niech $\mathcal{A}_\alpha$ będzie rodziną wszystkich zbiorów uzyskanych jako przeliczalne sumy zbiorów z $\mathcal{B}_\alpha$ i ich dopełnienia:
$\mathcal{A}_\alpha = \{\bigcup_n B_n,\ (\bigcup_n B_n)^c : \forall n\ B_n \in \mathcal{B}_\alpha\}$.

W ten sposób zdefiniowaliśmy $\mathcal{A}_\alpha$ dla wszystkich $\alpha < \omega_1$.

Dowody poprzez indukcję pozaskończoną
Dany jest zbiór dobrze uporządkowany $A = \{a_\alpha : \alpha < \alpha_0\}$ (najczęściej będzie to raczej dobrze uporządkowana rodzina zbiorów $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \alpha_0\}$).
Dane jest pewne zdanie logiczne $\Phi(a)$ z jednym parametrem a, za który można podstawiać elementy zbioru A (czyli własność, która ma sens dla tych elementów, choć na razie nie wiadomo, czy i dla których elementów jest ona spełniona).
Chcemy udowodnić, że własność Φ jest spełniona dla wszystkich elementów zbioru A: $\forall a \in A\ \ \Phi(a)$. W tym celu wystarczy wykonać dwa kroki:

1. Wykazać $\Phi(a_0)$ oraz
2. dla dowolnego $\alpha < \alpha_0$ wykazać, implikację $(\forall \beta < \alpha\ \Phi(a_\beta)) \implies \Phi(a_\alpha)$.

W praktyce często w kroku 2. rozróżnia się na dwa przypadki: jeśli α ma poprzednik (czyli jest postaci $\beta + 1$), to sprawdza się tylko implikację $\Phi(a_\beta) \implies \Phi(a_\alpha)$. Jeśli α jest liczbą graniczną to postępuje się jak w pierwotnym opisie w punkcie 2.

Przykład: Wracamy do poprzedniego przykładu, w którym zdefiniowaliśmy rodziny $\mathcal{A}_\alpha$ dla wszystkich $\alpha < \omega_1$. Dodatkowo definiujemy $\mathcal{B}$ jako $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$.

Twierdzenie: Właśnie skonstruowaliśmy sigma-ciało generowane przez rodzinę $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A}).$$

Dowód: Oczywiście $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, bo $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$, a $\mathcal{A}_0$ jest składnikiem sumy definiującej $\mathcal{B}$. Przy okazji widać, że rodzina $\mathcal{B}$ jest niepusta.

Teraz pokażemy, że $\mathcal{B}$ jest zamknięta na dopełnienia. Niech $B \in \mathcal{B}$. Wtedy $B \in \mathcal{A}_\alpha$ dla pewnego $\alpha < \omega_1$. Rodzina $\mathcal{A}_\alpha$ jest z definicji zamknięta na dopełnienia. Zatem $B^c \in \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}$.

Teraz pokażemy, że $\mathcal{B}$ jest zamknięta na przeliczalne sumy.
Niech $B_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Wtedy istnieje ciąg α_n liczb porządkowych mniejszych od ω_1, takich, że $B_n \in \mathcal{A}_n$. Weźmy $\alpha = \sup \alpha_n + 1$. Wiemy, że $\alpha < \omega_1$ (do ω_1 nie można dojść ciągiem przeliczalnym) oraz, że dla każdego n, $\alpha_n \leq \sup \alpha_n < \alpha$. Stąd $B_n \in \mathcal{B}_\alpha$ (przypomnijmy, że $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$), z czego wynika, że $\bigcup_n B_n \in \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}$.

Pokazaliśmy, że $\mathcal{B}$ jest sigma-ciałem zawierającym $\mathcal{A}$. Zostało do pokazania, że jest najmniejszym takim sigma-ciałem. Niech $\mathcal{C}$ będzie sigma-ciałem zawierającym $\mathcal{A}$. Trzeba pokazać, że $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Wystarczy pokazać, że $\forall \alpha < \omega_1\ \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{C}$. Do tego właśnie użyjemy indukcji pozaskończonej.

1. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{C}$ bowiem z założenia $\mathcal{C}$ zawiera wszystkie zbiory z $\mathcal{A}$, a jako sigma-ciało, również ich dopełnienia.

2. Dla $\alpha < \omega_1$ załóżmy, że wiemy już, że $\mathcal{A}_\beta \subset \mathcal{C}$ o ile $\beta < \alpha$. Mamy wywnioskować, że $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{C}$. Nasze założenie jest równoważne temu, że $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{C}$. Niech $A \in \mathcal{A}_\alpha$. Wtedy $A = \bigcup_n B_n$, gdzie $\forall n \; B_n \in \mathcal{B}_\alpha$ lub A jest dopełnieniem takiej sumy. W pierwszym przypadku wszystkie zbiory B_n są elementami $\mathcal{C}$, a więc A jako ich przeliczalna suma – również (bo $\mathcal{C}$ jest sigma-ciałem). W drugim przypadku – właśnie pokazaliśmy, że $\bigcup_n B_n$ jest w $\mathcal{C}$, zatem A, jako dopełnienie – też. $\square$